Modern Physics
www.physicsacademy.org

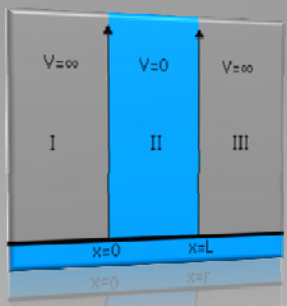
MODERN PHYSICS

Modern Physics is 20th century physics

The wave aspects of material particles

Lecture 11: Particle in a Box

Quantum Description of Confined Particles



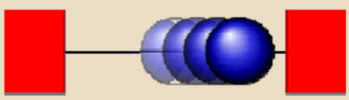
Particle in a Box

Dr. Hazem Falah Sakeek
Al-Azhar University – Gaza
Faculty of Science
Department of Physics

Introduction

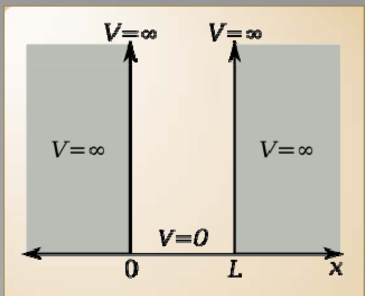
- الجسيم الحر free particle هو الذي لا يتأثر بأي عامل خارجي، وفي الفيزياء الكلاسيكية فان هذا الجسيم سوف يتحرك في خط مستقيم ويمتلك كمية حركة ثابتة (حسب قوانين نيوتن).
- بلغة الميكانيكا الموجية فان هذا الجسيم سوف يكون له موجة مصاحبة بطول موجي معروف بدقة. وبناء على مبدأ الشك فان موقع الجسيم غير محدد.

$$\Delta P = 0 \;\rightarrow\; \Delta x = \infty \;\rightarrow \Delta\lambda = 0$$



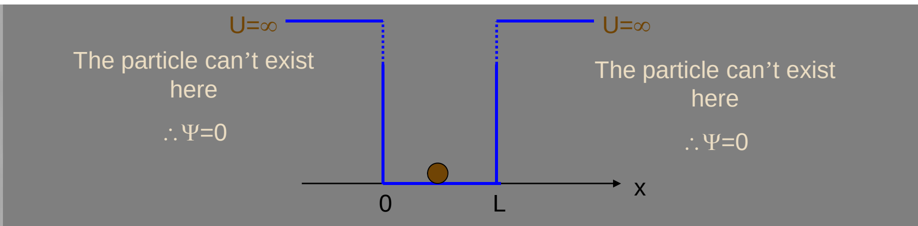
ولكن، معظم الجسيمات في الطبيعة لا يمكن أن تكون حرة لأنها تتفاعل مع المحيط الخارجي، وعليه فإننا نحتاج إلى قانون عام لميكانيكا الكم يأخذ في الحسبان كون هذه الجسيمات غير حرة.
وفي هذه المحاضرة سوف نقوم بتطوير وصف كمي لجسيم محصور confined particle.

جسيم محصور في صندوق



$$V = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & elsewhere \end{cases}$$

- دعنا نفترض أن الموجة المصاحبة لجسيم محصور في صندوق بالكيفية التي تنحصر فيها الموجة الموقوفة على وتر مشدود. وأن الجسيم المحصور يتحرك بحرية ذهاباً وإياباً على استقامة محور x وأنه يقابل جدار صلب عند كل من x=0 وx=L.



- من وجهة نظر الميكانيكا الموجية فإن احتمالية وجود هذا الجسيم خارج صندوق الجهد تساوي صفر، وبهذا فإن الدالة الموجية ψ والتي مربعها يمثل الاحتمالية لابد أن تساوي صفر لقيم x أقل من صفر و x أكبر من L والشروط الحدية هي:

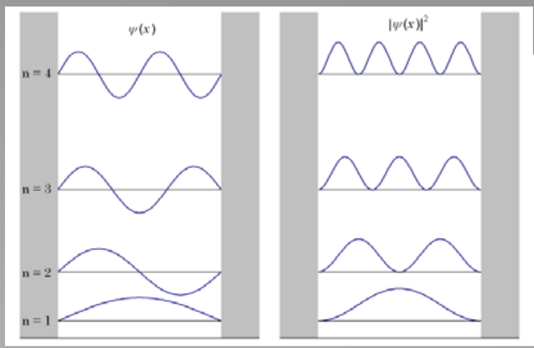
$$V(x) = 0 \quad \text{for} \quad 0 < x < L$$
$$V(x) = \infty \quad \text{for} \quad x < 0, x > L$$
$$\psi(x) = 0 \quad \text{for} \quad x \le 0, x \ge L$$

- الدالة الموجية التي تحقق هذه الشروط الحدية هي وحدها دون غيرها المتاحة لتمثيل هذه المسألة وحيث أن كمية الحركة التي يحملها الجسيم ثابتة في جميع أنحاء الحيز المذكور فإن λ سوف تكون معلومة القيمة، ولذلك سوف تمثل الجسيم بموجة جيبية تحقق الشروط الحدية وعليه فإن الأطوال الموجية المتاحة هي تلك التي تمتلك عدد صحيح من أنصاف الأطوال الموجية في الحيز من x=0 إلى x=L أي أن:

$$L = n\,\lambda/2$$

- حيث أن n عدد صحيح يأخذ القيم 1, 2, 3, ...و λ هو الطول الموجي للموجة المصاحبة للجسيم.

Standing Wave

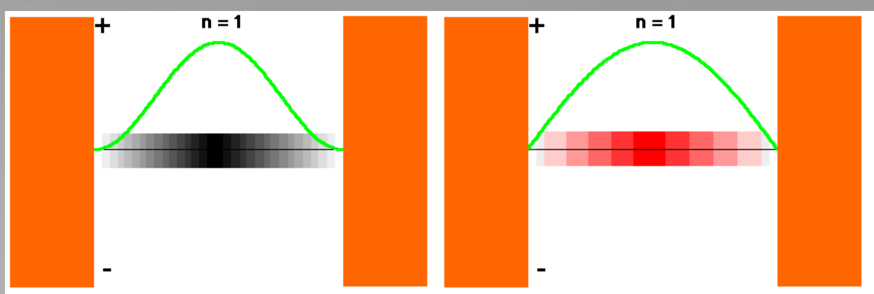


The particle-in-a-box wave functions (left) and probability densities (right) for *n=1,2,3,4*

يوضح الشكل المقابل أربعة مستويات يمكن أن يأخذها الجسيم المحصور في صندوق وشكل الدالة الموجية لكل مستوى بحيث تحقق الشروط الحدية وهذه الموجة تسمى موجة موقوفة standing wave حيث أن سعة الموجة عند x=0 و x=L تساوي صفر، ومربع هذه الموجة يحدد أحتمالية تواجد الجسيم في الصندوق لكل مستوى. ففي المستوى الأول والذي يسمى المستوى الأرضي ground state تكون الاحتمالية لتواجد الجسيم أكبر ما يمكن عند منتصف الصندوق x=L/2

تكميم مستويات الطاقة للجسيم المحصور

- لاحظ هنا أن الشروط الحدية للمسألة وتطبيقها على الدالة الموجية ψ أدت إلى وجود مستويات محددة لتواجد الإلكترون وهذا يعني أن الجسيم مكمم وسنجد أن هذا التكميم موجود في الطاقة التي يمتلكها الجسيم في داخل الصندوق.



إيجاد طاقة كل مستوى

- إذا كانت هناك أطوال موجية محدد للجسيم فإن كمية حركة الجسيم ستكون محددة أيضاً وحيث أن العلاقة بين الطول الموجي وكمية الحركة هي

$$p = h/\lambda$$

- ولحساب طاقة الحركة للجسيم والتي تساوي الطاقة الكلية للجسيم لأن طاقة الوضع تساوي صفر داخل الصندوق.

$L = n\,\lambda/2$

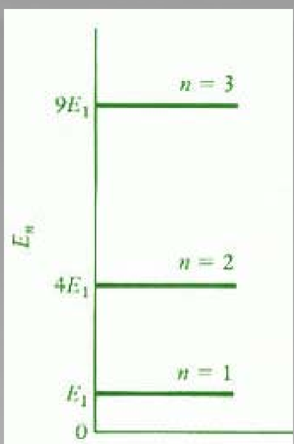
$\lambda = 2L/n$

$$P = \frac{h}{\lambda} = \frac{hn}{2L}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{P^2}{2m} = \frac{(hn/2L)^2}{2m}$$

$$\boxed{E_n = n^2\frac{h^2}{8mL^2}}$$

$$\boxed{E_n = n^2\frac{h^2}{8mL^2}}$$



- حيث m كتلة الجسيم و n عدد صحيح فإن الطاقة الكلية للجسيم ستكون مكممة وتأخذ القيم الموضحة في الشكل المقابل.

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} \qquad (1)$$

$$E_n = n^2 E_1 \qquad (2)$$

- ومقدار الطاقة في ادني مستوى هو E_1 يعرف باسم ground state وتكون الطاقة للمستويات الأعلى هي عبارة عن مربع n في قيمة الطاقة للمستوى الأدنى.

Example

Find the possible values of the energy and speed for the following particles confined to a one-dimensional box:

(a) an electron of mass 9.1×10^{-31}kg constrained to move back and forth within an atomic distance L = 4Å;

(b) a relatively large object of 9.1mg constrained to move along the axis with L=4cm.

Solution

(a) substituting in equation (1) gives the ground state energy

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2}$$

$E_1 = 3.7\times10^{-19}\text{J} = 2.3\text{ eV}$

وتكون قيم مستويات الطاقة الأخرى المسموحة للإلكترون هي:

$E_n = n^2 E_1$ or $4E_1, 9E_1, 16E_1, \ldots\ldots$

- أما السرعات التي يمتلكها الإلكترون فتحسب على النحو التالي:

$$P = mv = \frac{hn}{2L}$$

$$v = \frac{hn}{2mL} = nv_1$$

- وبحساب اقل سرعة v_1

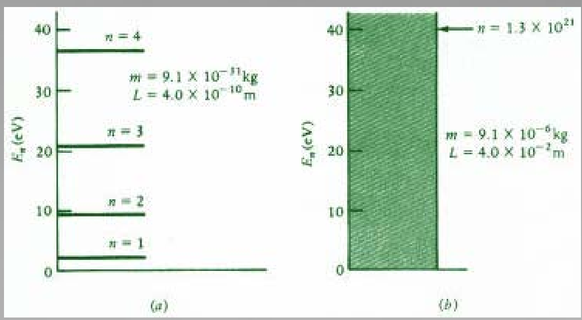
$$v_1 = \frac{h}{2mL} = 9.1\times10^5 m/s$$

(b) substituting in equation (1) for the large particle

$E_1 = 2.3x10^{-42}$ eV

- وهذا مقدار صغير جداً !!

- يوضح الشكل التالي مستويات الطاقة في الحالتين ونلاحظ بوضوح تكميم مستويات الطاقة للإلكترون بينما لا نلاحظ التكميم للجسيم المادي الكبير نسبياً حيث تبدو الطاقة متصلة. ولهذا السبب فإننا لا نلاحظ التكميم إلا على الجسيمات المتناهية في الصغر مثل الإلكترون.



أما السرعات التي يمتلكها الجسيم فتحسب على النحو السابق وتكون السرعة v_1

$v_1 = 9.1x10^{-28}$m/s

يمكن اعتبار الجسيم ساكن !!